Enseignant·e·s: Dovi, Huruguen, Khukhro
Algèbre Linéaire - CMS
12 janvier 2024
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 2 (Enoncé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 11 questions et 12 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 27 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - les points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par :

$$f(x, y) = (x - y, -2x + 2y).$$

Lequel des énoncés suivants est vrai ?

- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1))$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -2))$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, -2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1))$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$

Question 2 (1 point) Soit $\mathcal{B} = v_1, v_2$ une base de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

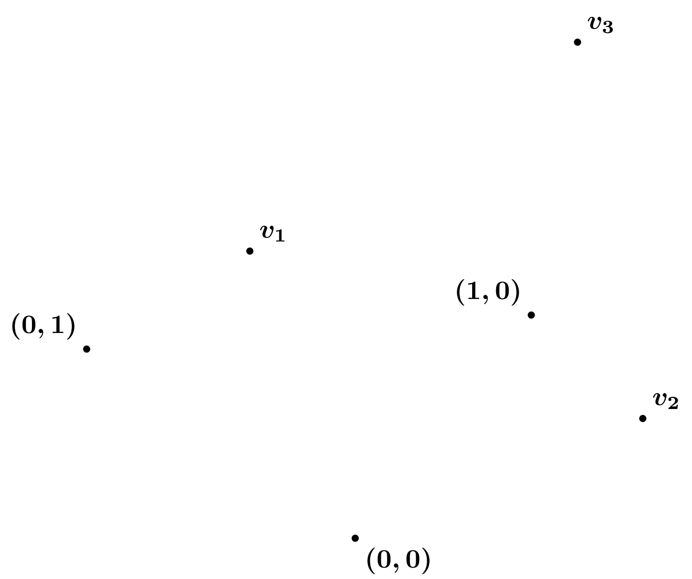
Lequel des énoncés suivants est vrai, quelque soit le choix de $\mathcal{B}$?

- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Question 3 (2 points) Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai ? Il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que ...

- ☐ $(1, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$
- ☐ $(1, 1), (1, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^2$ et $(1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \{(1, 1)\}$
- ☐ $(1, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
- ☐ $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0))$

Pour les **Questions 4, 5 et 6** ci-dessous on donne les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ comme sur le dessin suivant :



Soit $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ de $\mathbb{R}^2$. On note aussi :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}.$$

Question 4 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ☐ $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1 + v_2)$
- ☐ $v_2 - v_1 \in \mathrm{Vect}(v_3)$
- ☐ $v_1 \in \mathrm{Vect}(v_2 + v_3)$
- ☐ $v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1)$

Question 5 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ☐ $\alpha < 0$
- ☐ $\beta > 1$
- ☐ $\gamma < 1$
- ☐ $\delta > 0$

Question 6 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ☐ $\frac{1}{2} < \rho < 1$
- ☐ $\rho < 0$
- ☐ $0 < \rho < \frac{1}{2}$
- ☐ $\rho > 1$

Question 7 (2 points) On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (6x + 5y, -5x - 4y)$$

Pour quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est-elle sous forme réduite ?

- ☐ $\mathcal{B} = (1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$
- ☐ $\mathcal{B} = (5 + 5\sqrt{2}, -5 - 5\sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$
- ☐ $\mathcal{B} = (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1), (\sqrt{2}, 1)$
- ☐ $\mathcal{B} = (6\sqrt{2} + 5, -5\sqrt{2} - 4), (\sqrt{2}, 1)$

Question 8 (1 point) On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (7x - 2y, 19x - 5y)$$

Parmi les matrices suivantes, laquelle est une forme réduite de f ?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Question 9 (2 points) Parmi les valeurs de n proposées ci-dessous sélectionner celle pour laquelle on a $A^n = I_2$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

- ☐ $n = 15$
- ☐ $n = 25$
- ☐ $n = 44$
- ☐ $n = 36$

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf indication contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5
0 1 2 3 4 5 6 7 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par :

$$f(x, y) = (4x - 2y, 3x - 3y).$$

Soit la base $\mathcal{B} = (1, 3), (2, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) Donner la matrice de f en base canonique. Déterminer son rang, son image et son noyau.

(b) Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, trouver l'ensemble des antécédents $f^{-1}(\{(u, v)\})$.

(c) Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.

(d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $[f(x, y)]_{\mathcal{B}}$ et $[f(x, y)]_{\mathcal{B}_{can}}$.

(e) Existe-t-il une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Justifier la réponse.

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \alpha\,,\; u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\,.$$

(a) On suppose dans cette partie que $\alpha = 0$. Calculer la valeur de u_n en fonction de n.

(b) Trouver α sachant que la suite $\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie, et calculer cette limite.